čtvrtek 4. dubna 2024 8:11

(1) $$\int_0^1 x\cdot\arcsin x\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin t & 0\to 0 \\ dx=\cos t\,dt & 1\to\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cdot t\cdot\cos t\,dt = \frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\,dt$$

$$= \left|\begin{matrix} u=t & u'=1 \\ v'=\sin 2t & v=-\frac12\cos 2t\end{matrix}\right| = \left[-\frac{t}{4}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\frac14\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt}_{0} = -\frac{\pi}{8}\cos\pi = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^n\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}\frac1n}}{2^{2n+3}}}_{a_n} z^n$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sqrt{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}}{\operatorname{arctg}\frac1n}}\cdot\left(\frac{2^{2n+3}}{2^{2(n+1)+3}}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac14 \qquad \left(\frac{2^{2n+3}}{2^{2(n+1)+3}} = \frac{2^3}{2^5} = \frac14\right)$$

$\to$ poloměr konvergence je $4 \left(=\frac{1}{\frac14}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}}{\operatorname{arctg}\frac1n} = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\frac1n}{\operatorname{arctg}\frac1n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\to 1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

(a) řada konverguje absolutně pro $|z|<4$ a diverguje pro $|z|>4$

(b) volme $z\in\mathbb{C}$ splňující $|z|<4$, potom $z=4e^{i\varphi}$ pro nějaké $\varphi\in[0,2\pi)$

pro takové z dostáváme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(-1)^n}_{e^{i\pi n}}\sqrt{\operatorname{arctg}\frac1n}\,\frac{4^n}{2^{2n+3}}e^{in\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac18\sqrt{\operatorname{arctg}\frac1n}\,e^{i(\varphi+\pi)n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac18\sqrt{\operatorname{arctg}\frac1n}\left(\cos(\varphi+\pi)n + \sin(\varphi+\pi)n\right)$$

Platí $\frac18\sqrt{\operatorname{arctg}\frac1n}\searrow 0$ a dále $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\varphi+\pi)n$ a $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\varphi+\pi)n$

mají omezenou posloupnost částečných součtů pro $\varphi \neq \pi$. Pro $\varphi \in [0,2\pi) \setminus \{\pi\}$ tedy řada konverguje podle AD kriteria (Dirichletova podmínka).

Pro $\varphi = \pi$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8}\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}$. Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{8}\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{8},$$ zároveň řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje, řada tedy pro $\varphi = \pi$ diverguje.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k \to a_n = k \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{k+1}{k} \to 1 \to$ poloměr konvergence 1

řada tedy konverguje pro $|x|<1$ a diverguje pro $|x|>1$.

Pokud $|x|$, potom $|k x^k| = k \to \infty$ (není tedy splněna nutná podmínka)

Řada tedy konverguje právě tehdy, když $|x|<1$. Pro tato x platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = x\sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = x\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^k\right)' = x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right)' = \boxed{\frac{x}{(1-x)^2}}$$